Chapitre 6 : Relations

Définition 0.1. Une relation (binaire) sur un ensemble est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$
Étant donné $x, y \in E$, on notera $x \mathcal{R} y$ si (x, y) est élément de $\mathcal{R}$ et $x \not\mathcal{R} u$ sinon.

1 Relation d'ordre

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit E un ensemble.
Une relation d'ordre sur E est une relation $\mathcal{R}$:

- ∗ Réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- ∗ Antisymétrique : $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \implies x = y$
- ∗ Transitive : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$

Définition 1.2. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
On dit que l'ordre $\preccurlyeq$ est total si $\forall x, y \in E, (x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x)$

Définition 1.3. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

- ∗ Deux éléments $x, y \in E$ sont dits comparables si $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$
- ∗ Une partie $A \subseteq E$ est une chaîne si deux éléments quelconques de A sont toujours comparables.
- ∗ Une partie $A \subseteq E$ est une antichaîne si deux éléments quelconques de A ne sont jamais comparables.

Définition 1.4. Soit $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnées.
Une application $f : E \to F$ est dite croissante si $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \preccurlyeq x_2 \implies f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$

1.2 Éléments particuliers

Définition 1.5. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
Soit $A \subseteq E$. On dit que :

- ∗ A est majoré s'il existe $M \in E$ tel que $\forall a \in A, a \preccurlyeq M$
- ∗ A est minoré s'il existe $m \in E$ tel que $\forall a \in A, m \preccurlyeq a$
- ∗ A admet un maximum s'il existe $M \in A$ tel que $\forall a \in A, a \preccurlyeq M$
- ∗ A admet un minimum s'il existe $m \in A$ tel que $\forall a \in A, m \preccurlyeq a$

Proposition 1.6. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$
S'il existe, le maximum (resp. le minimum de A) est unique.
On le note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Définition 1.7. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$
Un élément $a \in A$ est dit :

- ∗ Maximal, s'il n'y a pas d'élément de A qui lui est strictement supérieur, càd si $\forall a' \in A, a \preccurlyeq a' \implies a = a'$
- ∗ Minimal, si $\forall a' \in A, a' \preccurlyeq a \implies a' = a$

Proposition 1.8. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$
Alors, si A admet un maximum, $\max(A)$ est l'unique élément maximal de A

2 Relation d'équivalence

2.1 Généralités

Définition 2.1. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est :

* Réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
* Symétrique : $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$
* Transitive : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$

2.2 Classes d'équivalence

Définition 2.2. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$ et $x \in E$
On définit la classe d'équivalence de x

$$[x]_\sim = d(x) = \bar{x} = \dot{x} = \{y \in E \mid x \sim y\}$$

Définition 2.3. Soit E un ensemble.
Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est une partition de E si :

* $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
* Les ensembles sont (2 à 2) disjoints : $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j \neq \emptyset$
* Les ensembles recouvrent E, càd $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$

Proposition 2.4. Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E
Les classes de $\sim$ forment une partition de E

Lemme 2.5. Soit $x, y \in E$ tels que $x \sim y$
Alors $[x] = [y]$

2.3 Ensemble quotient

Définition 2.6. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E

* On appelle ensemble quotient l'ensemble $E/\sim$ des classes d'équivalence de $\sim$
* L'application $\begin{cases} E \to E/\sim \\ x \mapsto [x]_\sim \end{cases}$ est appelée la surjection canonique.

Définition 2.7. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence. Soit $f : E \to F$ une application.
Notons $\pi : E \to E/\sim$ la surjection canonique.
On dit que f passe (ou descend) au quotient si $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$
Dans ce cas, il existe une unique application $\bar{f} : E/\sim \to F$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$

2.4 Deux quotients importants

"Construction" de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
On munit l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ de la relation $\sim$ définie par :

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$$

On "définit" $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \sim$
On définit alors 2 lois :

$$+ : \begin{cases} (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim \\ ([(a_1, b_1)]_\sim, [(a_2, b_2)]_\sim) \mapsto [(a_1 b_2 + a_2 + b_1, b_1 b_2)]_\sim \end{cases}$$

$$\cdot : \begin{cases} (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim \\ ([(a_1, b_1)]_\sim, [(a_2, b_2)]_\sim) \mapsto [(a_1 a_2, b_1 b_2)]_\sim \end{cases}$$

"Construction" de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On sait que la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
On note $[x]_n$ la classe d'équivalence de x par cette relation et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient.